

Exercices – Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 :

Une urne contient 100 boules de différentes couleurs à savoir : 10 bleues, 10 rouges, 5 orange, 15 vertes, 20 noires, 40 marron. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule de l'urne. A chaque couleur, on associe un gain en euros, qui est négatif s'il s'agit d'une perte : 100 euros si la boule tirée est bleue, 300 si elle rouge, 100 si elle est verte, 50 si elle est marron, -200 si elle est noire ou orange.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain en euro.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.

Exercice 2 :

Une urne contient 9 boules (4 rouges, 2 bleues et 3 vertes) identiques au toucher. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne et on note leur couleur. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.
2. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne; puis on tire une seconde boule et on note sa couleur. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.
3. On adopte la règle suivante : soit n un entier naturel non nul; on gagne $10n$ euros si les deux boules tirées sont de la même couleur et on perd n^2 euros dans le cas contraire. On désigne par X (respectivement Y) la variable aléatoire qui, à tout tirage de deux boules de l'urne selon le procédé décrit dans la première question (respectivement dans la deuxième question), associe le gain algébrique réalisé à l'issue du tirage.
 - a. Déterminer les lois de probabilité de X et de Y .
 - b. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$.
 - c. Déterminer les valeurs de n telles que $E(X) < 0 < E(Y)$.

Exercice 3 :

Un dé équilibré a une face « 1 », deux faces « 2 », deux faces « 3 » et une face « 4 ». On lance une fois ce dé et on note X le nombre sorti. Déterminer la loi de X , sa fonction de répartition, faire leur représentation graphique sur la même figure. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

Exercice 4 :

Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X , son espérance et son écart type.

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire prenant pour valeurs $0, 1, \dots, n$. Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 - F_X(k)$

Exercice 6 :

On lance deux pièces de monnaie. Soit X la variable aléatoire qui vaut 0 si on obtient deux fois piles, 1 si on obtient une fois pile et une fois face, 2 si on obtient deux fois face. Déterminer la loi de X . Représenter la fonction de répartition de X .

Exercice 7 :

Trois étudiants passent un examen en fin d'année. Compte tenu de leur profil : assiduité, niveau de réflexion, travail fourni durant l'année, leurs chances de réussir sont estimées respectivement à 90%, 80%, 60%.

1. Calculer les probabilités que parmi ces trois étudiants, il y ait, respectivement : aucun admis, un admis, deux admis, trois admis.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants admis.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.

Exercice 8 :

On jette trois fois de suite un dé bien équilibré. Au cours de ce lancer de dé, le joueur perd 3 euros s'il obtient au moins un multiple de 3 et gagne 6 euros dans le cas contraire. On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.