

Exercices – Utilisation des symboles somme et produit

Exercice 1 :

Les formules suivantes sont-elles vraies?

1. $\sum_{k=1}^{K=n} x_k + y_k = \sum_{k=1}^{k=n} x_k + \sum_{k=1}^{k=n} y_k$
2. $\sum_{k=1}^{K=n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{k=n} x_k \times \sum_{k=1}^{k=n} y_k$
3. $\prod_{k=1}^{k=n} x_k y_k = \prod_{k=1}^{k=n} x_k \prod_{k=1}^{k=n} y_k$
4. $\prod_{k=1}^{k=n} k^2 = (n!)^2$

Exercice 2 :

Soit x réel et n entier naturel. Soit $S(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(kx)$.

1. Réduire la somme $\sum_{k=0}^{k=n} e^{ikx}$.
2. Réduire $S(x)$ en produit de facteurs et résoudre l'équation $S(x)=0$.

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Calculer :

1. $\sum_{k=0}^{k=n} i^k$
2. $\sum_{k=0}^{k=n-1} w_k^n$
3. $\sum_{k=0}^{k=n-1} w_k$
4. $\prod_{k=0}^{k=n-1} w_k$
5. $\sum_{k=0}^{k=n-1} w_k^p$ où $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4 :

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(kx)$.

1. Préciser les valeurs de C_n et S_n lorsque x est un multiple de 2π .
2. On suppose que x n'est pas un multiple de 2π . Calculer $C_n + iS_n$.
3. En mettant en facteur $e^{i\frac{n+1}{2}x}$ au numérateur et $e^{i\frac{\pi}{2}}$ au dénominateur de l'expression obtenue en 2.a, montrer les égalités :

$$4. C_n = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Exercice 5 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $c_n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \cos(2ka+b)$ et $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \sin(2ka+b)$

1. Donner une expression simple de c_n et s_n .
2. On suppose que $c_n \neq 0$. Simplifier $t_n = \frac{s_n}{c_n}$.

Exercice 6 :

1. Montrer que $\frac{\tan(a) - \tan(b)}{\sin(a-b)} = \frac{1}{\cos(a)\cos(b)}$.

2. Soit x réel et n entier. Soit $S = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\cos(kx)\cos((k+1)x)}$. Réduire la somme S .