Exercices – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer en fonction de n le terme général u_n de la suite (u_n) définie sur ℕ par :

1. $\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=3 \\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=1 \\ u_{n+2}=-u_{n+1}-u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=5 \\ u_{n+2}=3u_{n+1}+4u_n \end{cases}$

Exercice 2 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=v_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1}=3u_n+2v_n \\ v_{n+1}=u_n+2v_n \end{cases}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}=av_{n+1}+bv_n$.
2. Déterminer (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer (u_n) en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0=1$, $v_0=w_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\sqrt{2}\,v_n \\ v_{n+1}=\sqrt{2}\,u_n+v_n+\sqrt{2}\,w_n \\ w_{n+1}=\sqrt{2}\,v_n+w_n \end{cases}$.

1. Soit $d_n=u_n-w_n$. Montrer que (d_n) est une suite constante.
2. Soit $S_n=u_n+w_n$. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et v_n.
3. Exprimer v_{n+2} en fonction de S_{n+1} et v_{n+1}.
4. Exprimer v_{n+2} en fonction de v_n et v_{n+1}.
5. Déterminer v_n en fonction de n.
6. Déterminer S_n en fonction de n.
7. Déterminer u_n et w_n en fonction de n.