Exercices – Suites de fonctions

Exercice 1 :

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x)=\dfrac{n+1}{n}x \quad x\in[0;+\infty[$
2. $f_n(x)=x^n \quad x\in\mathbb{R}$
3. $f_n(x)=(\sin(x))^n \quad x\in\mathbb{R}$
4. $f_n(x)=\dfrac{nx^2+1}{x^2+n(x^4+1)} \quad x\in\mathbb{R}$
5. $f_n(x)=nxe^{-nx} \quad x\in\mathbb{R}$
6. $f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx} \quad x\in[0;+\infty[$
7. $f_n(x)=xe^{-nx} \quad x\in[0;+\infty[$
8. $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx} \quad x\in[0;+\infty[\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}$
9. $f_n(x)=\dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} \quad x\in\mathbb{R}$
10. $f_n(x)=n\sin\left(\dfrac{x}{n}\right) \quad x\in\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Soit $f_n(x)=\dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ pour $x\in[0;1]$

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
2. Soit $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\,\mathrm{d}x$ .Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 :

Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers u , I un intervalle fermé, (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f continue sur I .

1. Montrer que $(f_n(u_n))_n$ converge vers $f(u)$.
2. Application : $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx} \quad x\in[1;2]$ et $u_n=\dfrac{n}{n-1}$.
3. Contre exemple : $g_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx} \quad x\in[0;1]$ et $u_n=\dfrac{1}{n}$ ((g_n) ne converge plus uniformément)
4. On pose $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{nt}{1+nt}\,\mathrm{d}t$ pour $x\in[0;1]$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(F_n)_n$.

Exercice 4 :

Soit $f_n(x)=\dfrac{ne^x+\mathrm{e}^{-x}}{n+1}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[-A;A]$ pour $A>0$.
3. Étudier la convergence de $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.