

# Exercices – Suites convergentes

## Exercice 1 :

Déterminer si la suite  $(u_n)$  définie pour  $n$  entier naturel converge ou diverge (déterminer la limite) :

1.  $u_n = \frac{2n-1}{n+2}$
2.  $u_n = 2 + 2^{-n}$
3.  $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
4.  $u_n = n^2 - 3n - 1$
5.  $u_n = \frac{n^3+1}{n+1}$
6.  $u_n = 5 \times (0,3)^n$
7.  $u_n = \frac{2^n}{3^n}$
8.  $u_n = \frac{2^n - 5^n}{3^n}$
9.  $u_n = \frac{\cos n + 2}{n+1}$
10.  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n)$
11.  $u_n = \frac{3 + (-1)^n}{n}$
12.  $u_n = n^4 (2 + \cos(n))$
13.  $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
14.  $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$
15.  $u_n = \frac{n}{n^2+1}$
16.  $u_n = \frac{E(nx)}{n}$  pour  $x \in \mathbb{R}$
17.  $u_n = \frac{n!}{n^n}$

## Exercice 2 :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par:  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Étudier la monotonie de  $(u_n)$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > n^2$ .
3. Déterminer est la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice 3 :

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par oui ou non en justifiant la réponse.

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites qui vérifient pour tout entier  $n$  l'inégalité  $u_n \leq v_n$ . On peut affirmer alors que :

1. Si  $(v_n)$  est convergente alors  $(u_n)$  est convergente
2. Si  $(u_n)$  diverge alors  $(v_n)$  diverge
3. Si  $(v_n)$  est bornée alors  $(u_n)$  est majorée
4. Si  $(v_n)$  est décroissante alors  $(u_n)$  est majorée

## Exercice 4 :

Montrer à l'aide de la définition que :

1.  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 4$  converge vers  $-4$
2.  $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$  converge vers  $0$
3.  $u_n = \frac{n + (-1)^n}{3n+1}$  converge vers  $\frac{1}{3}$

**Exercice 5 :**

En utilisant la définition d'une suite divergente, prouver que la suite  $(u_n)$  est divergente dans les cas suivants :

1.  $u_n = n^2$
2.  $u_n = 2n + 1$

**Exercice 6 :**

Démontrer que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  est divergente.

**Exercice 7 :**

Soit  $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . La suite  $(u_n)$  converge-t-elle? (on pourra considérer les suites extraites  $u_{2n}$  et  $u_{2n+1}$ ).

Rappel :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

**Exercice 8 :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{9}{u_n} \right) \end{cases}$$

Soit  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{9}{x} \right)$  avec  $Df = ]0; +\infty[$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .

1. Montrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est minorée par 3.
2. Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.
4. Étudier la valeur de la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 9 :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

1. La suite  $(u_n)$  est-elle monotone? Majorée, minorée, bornée?
2. À l'aide de la définition, montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers 2. Chercher en particulier un entier  $p$  tel que :
3. quelque soit  $n \geq p$ ,  $|u_n - 2| < 10^{-4}$ .

**Exercice 10 :**

Soient les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_n = 2^n$  et  $v_n = 3^n$ .

1. Chercher les limites des suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ .
2. On pose  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  et  $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ . Chercher les limites des suites  $(S_n)$ ,  $(T_n)$  et  $\left(\frac{S_n}{T_n}\right)$ .

**Exercice 11 :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour  $n > 0$  par  $u_n = n! \sin(1) \sin\left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{3}\right) \dots \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .

1. Montrer pour tout  $n > 0$ ,  $u_n > 0$ .
2. Réduire  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ . En utilisant l'inégalité  $|\sin(t)| \leq |t|$ , montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.

**Exercice 12 :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour  $n > 0$  par  $u_n = \binom{2n}{n}$ .

1. Réduire  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Montrer que  $u_{n+1} \geq 3 u_n$ .
2. En déduire, en raisonnant par récurrence, que  $u_n \geq 3^{n-1} u_1$ , puis déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

Quelle est la limite de la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ .

**Exercice 13 :**

Soient les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , avec  $u_n = \sin(\pi(\sqrt{3}+1)^n)$  et  $v_n = \sin(\pi(\sqrt{3}-1)^n)$ .

1. Chercher la limite de  $(v_n)$ .
2. Montrer avec la formule du binôme que  $(\sqrt{3}+1)^n + (1-\sqrt{3})^n$  est entier.
3. En déduire une relation simple entre  $u_n$  et  $v_n$ , et la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 14 :**

On considère les suites récurrentes suivantes :

1.  $u_{n+1} = \ln(2+u_n)$  avec  $u_0 > 0$
2.  $u_{n+1} = (3+u_n)^{\frac{1}{3}}$  avec  $u_0 > 0$
3.  $u_{n+1} = \frac{3u_n+10}{u_n+3}$  avec  $u_0 > 0$

Dans les trois cas, construire la courbe de la fonction  $f$  associée, étudier la monotonie et la convergence de la suite, selon les valeurs de  $u_0$ .

**Exercice 15 :**

Soit  $(E)$  l'équation  $\cos(x)=x$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $f$  définie par  $f(x)=\cos(x)-x$ . Montrer que  $(E)$  a une seule solution réelle  $s$  et que  $0 < s < 1$ .
2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = \cos(u_n)$ , avec  $u_0$  quelconque.
  - a. Montrer que, pour  $n > 0$ ,  $-1 \leq u_n \leq 1$ , et que pour  $n > 1$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .
  - b. Montrer que la fonction  $\cos$  est contractante sur  $[0; 1]$ .
  - c. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers  $s$ , et chercher une valeur approchée à  $10^{-4}$  près de  $s$ .

**Exercice 16 :**

Soit l'équation  $(E)$   $x^5+x=a$ , où  $a$  est un réel positif donné.

1. Montrer que l'équation  $(E)$  a une solution  $s$  quel que soit  $a$ .
2. Pour trouver une valeur approchée de  $s$ , on veut appliquer la méthode de Newton à la fonction  $f$  définie par  $f(x)=x^5+x-a$ .
  - a. Donner l'expression de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
  - b. Comment choisir  $u_0$  pour être sûr que la suite converge?