Exercices – Suites et équivalents

Exercice 1 :

Déterminer un équivalent simple de (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$, $a \in \mathbb{R}^*$.
2. $u_n = (1+\sqrt{n^2+1})^{\frac{1}{2}}$ (on montrera que u_n est équivalent à $\sqrt{n}$ en $+\infty$)
3. $u_n = \ln(n^2+n+1)$ (on montrera que u_n est équivalent à $2\ln n$ en $+\infty$)
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer un équivalent simple de $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

Exercice 2 :

En utilisant des équivalents, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}^*$.
2. $u_n = \left(\frac{n}{n-a}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.
3. $u_n = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n$, $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$ et $a \neq b$.
4. $u_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$.

Exercice 3 :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, α et β sont deux réels strictement positifs. Soit $u_n = \left(1+\frac{a}{n^\alpha}\right)^{n^\beta}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

1. Prouver que la suite (u_n) est convergente.
2. Pour $\mathbb{N}^*$, on définit $w_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}$. Montrer que $w_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer de deux façons de deux façons différentes $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{k=n} w_k$.
4. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n^2$, puis un équivalent de u_n .

Exercice 5 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. Déduire un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n}}$.