Exercices – Séries numériques

Exercice 1 :

Soit (a_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$. Soit $u_n=a_n-a_{n+1}$.

1. Calculer $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k$, puis $S=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $R_n=S-S_n$.

2. Calculer S_n , S et R_n pour : $u_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, $u_n=\dfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$, $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 2 :

Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme dans les cas suivants : $u_n=n^{\frac{1}{n}}-(n+1)^{\frac{1}{n+1}}$, $u_n=\dfrac{2n-1}{n(n^2-4)}$ pour $n\geqslant 3$ et $u_0=u_1=u_2=0$, $u_n=\dfrac{2}{n(n^2-1)}$ pour $n\geqslant 3$ et $u_0=u_1=u_2=0$.

Exercice 3 :

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$:

1. $u_n=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ $n\geqslant 1$

2. $u_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ $n\geqslant 2$

3. $u_n=\dfrac{n-1}{n(n+1)}$

4. $u_n=\dfrac{\ln(n)}{n}$ $n\geqslant 3$

5. $u_n=\dfrac{n}{2^n}$

6. $u_n=\mathrm{e}^{-\lambda n}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

7. $u_n=1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$

8. $u_n=\mathrm{e}^{-\frac{n-1}{n^2+1}}$

9. $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$

10. $u_n=(-1)^n\dfrac{n-1}{n(n+1)}$

11. $u_n=\dfrac{a^n}{n^\alpha n^n}$ $n\geqslant 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $a\in\,]0;+\infty[$

12. $u_n=\dfrac{a^n n!}{n^n}$ $n\geqslant 1$, $a\in\,]0;+\infty[$

13. $u_n=\dfrac{(na)^n}{n!}$ $n\geqslant 1$, $a\in\,]0;+\infty[$

14. $u_n=\dfrac{n^p}{a^n}$ $p\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$, $a\in\,]0;+\infty[$

Exercice 4 :

Montrer que la série harmonique diverge.

Exercice 5 :

Étudier la convergence de la série de Rieman $\sum\dfrac{1}{n^\alpha}$

(pour $\alpha>1$ on pose $v_n=\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$, calculer $\sum v_n$ puis trouver un équivalent de v_n)

Exercice 6 :

Étudier la convergence de la série de Bertrand $\sum\dfrac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.