Exercices – Séries de fonctions

Exercice 1 :

Étudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale des séries $\sum u_n$:

1. $u_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{x^2+n^2}$ $n\geqslant 1$, $x\in\mathbb{R}$
2. $u_n(x)=\dfrac{x^2\sin(nx)}{x^2+n^2}$ $n\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$
3. $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$ $n\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$
4. $u_n(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ $n\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$
5. $u_n(x)=\dfrac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$ $n\geqslant 0$, $x\in[0;+\infty[$ (se ramener à $a_n(x)-a_{n+1}(x)$)
6. $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$ $n\geqslant 1$, $x\in\mathbb{R}$
7. $u_n(x)=\dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}$ $n\geqslant 1$, $x\in\mathbb{R}$
8. $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n^2}(x+n)$ $n\geqslant 1$, $x\in\mathbb{R}$
9. $u_n(x)=n^\alpha\mathrm{e}^{-n^2x}$ $n\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$
10. $u_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(n+x)^2}$ $n\geqslant 1$, $x\in[0;+\infty[$ (uniquement la convergence normale)

Exercice 2 :

Soit la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(x)=\dfrac{2x}{n^2+x^2}$ $n\geqslant 1$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-1;1]$ .On notera f sa somme.
2. Exprimer sous forme d'une série de fonctions $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x\in[-1;1]$.
3. Étudier la convergence uniforme sur $[-1;1]$ de $\sum g_n$ où $g_n(x)=\ln\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ avec $n\geqslant 1$.
4. Étudier la convergence uniforme sur $[-1;1]$ de $\sum h_n$ où $h_n(x)=\dfrac{2(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2}$ avec $n\geqslant 1$.
5. En déduire f' sous forme d'une série de fonctions, et que f est croissante sur $[-1;1]$.

Exercice 3 :

Soit la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(x)=n\,\mathrm{e}^{-nx}$ et $x\in\mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple sur $]0;+\infty[$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[a;+\infty[$.
3. Étudier la convergence normale sur $[a;+\infty[$.
4. Calculer $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, où f est la somme de la série $\sum f_n$.