Exercices – Réduction des endomorphismes : Applications

Exercice 1 :

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

1. Diagonaliser A.
   On notera D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Trouver toutes les matrices $N \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $N^2 = D$
   (on remarquera qu'une telle matrice commute nécessairement avec C).
3. En déduire les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

Exercice 2 :

Calculer les puissances des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

On considère les trois suites réelles « mutuellement récurrentes » u, v et w définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 5$ et la relation :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}$

1. Si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, montrer que la relation s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice que l'on déterminera.
2. Réduire la matrice A.
3. En déduire l'expression u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 4 :

Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.
2. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$.
4. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 5$.

Exercice 5 :

On considère la suite réelle u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n}$

1. Démontrer par récurrence que cette suite est bien définie et qu'elle reste strictement positive.
2. En appliquant la fonction $\ln$, se ramener à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite u.

Exercice 6 :

Soient a et b deux réels. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Montrer que les sous espaces propres associés ne dépendent pas de a et de b.
3. Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. Déterminer les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$, vérifiant : $\begin{cases} u_{n+1} = a u_n + b v_n + b w_n \\ v_{n+1} = b u_n + a v_n + b w_n \\ w_{n+1} = b u_n + b v_n + a w_n \end{cases}$
5. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = ax + by + bz \\ y' = bx + ay + bz \\ z' = bx + by + az \end{cases}$

Exercice 7 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Trigonaliser A .
2. Calculer A^k .
3. Déterminer les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$, vérifiant : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + w_n \end{cases}$.
4. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \end{cases}$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 :

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer A^n .