Exercices – Polynômes

Exercice 1 :

Effectuer les divisions euclidiennes sur $\mathbb{R}[X]$ suivantes :

1. $4X^5-2X^4+5X^3+4X+2$ par X^2+1
2. $-2X^5-2X^4-X^3+4X^2+3$ par X^2+X+1
3. $-X^6+3X^2-4X+1$ par X^7-4X^5+1
4. $2X^4-3X^3+4X^2-5X+6$ par X^2-3X+1

Exercice 2 :

Effectuer les divisions suivant les puissances croissantes sur $\mathbb{R}[X]$:

1. $3+X-2X^3$ par $3+X$ à l'ordre 4
2. $3+4X+4X^2-X^3-2X^4-2X^5$ par $1+X+X^2$ à l'ordre 6
3. $1+X$ par $1-X^2+X^4$ à l'ordre 2
4. $4+4X+X^2$ par $2+X+X^2$ à l'ordre 3
5. $1-2X+X^4$ par $-1+3X+X^2$ à l'ordre 3

Exercice 3 :

Soient $S(X)=X^7+\alpha X^6+\beta X^5-X^4+5X^3-2X^2$ et $T(X)=X^4-2X^2+X$.

1. Diviser S par T suivant les puissances croissantes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer α et β pour que T divise S.

Exercice 4 :

Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{R}$. On considère un polynôme P de degré p.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q à coefficients réels tel que $P(X)-P(a)=(X-a)Q(X)$.
2. On écrit $P=\alpha_p X^p+\alpha_{p-1}X^{p-1}+\ldots+\alpha_0$ et $Q=\beta_{p-1}X^{p-1}+\ldots+\beta_0$.
   - **a.** Exprimer α_i en fonction de β_i et β_{i-1}.
   - **b.** En déduire β_i en fonction de α_{i+1} et β_{i+1}, puis $P(a)$.
3. Calculer la valeur du polynôme P au point a quand :
   - **a.** $P=4X^3+X^2+3$ et $a=-1$
   - **b.** $P=2X^5-5X^3+8X$ et $a=-3$
   - **c.** $P=2X^7-3X^6+2X^5-7X^4-4X^3+2X\,\ddot{}\,2+8X-9$ et $a=-3$

Exercice 5 :

Calculer le $pgcd(A,B)$ et le $ppcm(A,B)$ dans les cas suivants :

1. $A=X^4-X^3-4X^2-X+1$ et $B=X^3-X^2-5X+2$
2. $A=X^4-X^3-5X^2+10X-5$ et $B=X^3+X^2-3X+1$
3. $A=(X-1)^3(X+2)^2$ et $B=(X-1)^2(X-3)$

Exercice 6 :

Soient $A=X^4+X^3-2X+1$ et $B=X^2+X+1$.

1. Montrer que A et B sont premiers entre eux.
2. Déterminer U et V tels que $AU+BV=1$.

Exercice 7 :

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $A=X^6-5X^5-3X^4+9X^3+(a+3)X^2+(a-5)X-2$.
Déterminer suivant les valeurs de a le pgcd entre A et $X^4-6X^3+4X^2+6X+a-6$.

Exercice 8 :

Soient $A=X^3+(1-a)X^2+(a^2-1)X-a$ et $B=X^2+(1-a)X+a^2-2$. Déterminer le $pgcd(A,B)$ suivant les valeur de a.

Exercice 9 :

Factoriser (c'est à dire comme produit de facteurs irréductibles) les polynômes suivants :

1. $X^5+3X^4+4X^3+4X^2+3X+1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$
2. X^8+X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$
3. $2X^3-(5+6i)X^2+9iX+1-3i$ dans $\mathbb{C}[X]$, sachant qu'il admet une racine réelle.
4. X^6+1 dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 10 :

Trouver l'ordre de multiplicité de la racine x_0 de P dans les cas suivants :

1. $P=X^4-X^3-3X^2+5X-2$ et $x_0=1$
2. $P=X^3-iX^2+X-\mathrm{i}$ et $x_0=\mathrm{i}$

Exercice 11 :

Déterminer un polynôme P de degré 5 tel que $(X-1)^3$ divise $P(X)+1$ et tel que $(X+1)^3$ divise $P(X)-1$.

Exercice 12 :

1. Soit $P=X^6-6X^5+15X^4-20X^3+12X^2-4$.
   - **a.** Déterminer le pgcd entre P et son polynôme dérivé P' .
   - **b.** En déduire une décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Même question avec $P=X^5-13X^4+67X^3-171X^2+216X-108$.

Exercice 13 :

Montrer que X^2+X , X^2-X et X^2-1 sont premiers entre eux mais pas deux à deux.

Exercice 14 :

Étant donné les polynômes $A=X^5+4X^4+6X^3+6X^2+5X+2$, $B=X^2+3X+2$ et $C=X^3+2X^2+X+2$.
Déterminer $pgcd(A,B,C)$.

Exercice 15 :

1. Soit A un polynôme à coefficients entiers : $A=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$. Soient $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{Z}^*$ tels que $pgcd(p,q)=1$.
   On suppose que $\dfrac{p}{q}$ est une racine irréductible de A .
   - **a.** Montrer que $a_0q^n+a_1q^{n-1}p+a_2q^{n-2}p^2+\ldots+a_np^n=0$.
   - **b.** En déduire que p divise a_0 et q divise a_n .
   - **c.** Conclure.

2.
   - **a.** Soit $A=X^7-214X^6+612X^2-4X-1$. Montrer que A n'a pas de racine rationnelle.
   - **b.** Soit $A=3X^3-2X^2+5X+2$. Déterminer les raines rationnelles de A .
   - **c.** Soit $A=2X^4-3X^3-3X^2+6X-2$. Factoriser A dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 16 :

Soit m , n et p trois entiers naturels. Montrer que (X^2+X+1) divise $(X^{3m+2}+X^{3n+1}+X^{3p})$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 17 :

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^6+2X^4+2X^2+1$
2. X^4+X^2+3
3. X^n-1 avec $n\in\mathbb{N}^*$

Exercice 18 :

1. Soient a_1 , a_2 , ..., a_n , n nombres complexes distincts deux à deux, b_1 ,..., b_n des nombres complexes.
   Donner un polynôme de degré $n-1$ qui vérifie $P(a_i)=b_i$.
2. Calculer un polynôme de degré 2, tel que $P(1)=2$, $P(2)=3$ et $P(3)=6$.

Exercice 19 :

Soient p et q des réels, n un entier naturel non nul et $P(X)=X^n+pX+q$. Montrer que :.

1. Si n est pair, P admet au plus 2 racines réelles distinctes.
2. Si n est impair, P admet au plus 3 racines réelles distinctes.

Exercice 20 :

Soient $P\in\mathbb{C}[X]$ et a , b deux complexes distincts.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de a , b , $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 21 :
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$, tels que pour tout $x \in \mathbb{C}$: $P(3x)=P'(x)P''(x)$.

Exercice 22 :

1. Soit $P(X)$ une fonction polynôme. Montrer que l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme :
   $Q(X)=P(X)-P(1)-(X-1)P'(X)+\frac{1}{4}(X-1)^2(P''(X)+P''(1))$ est supérieur ou égal à 3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme $R_n(X)=nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$.

Exercice 23 :
Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$A(x)=x^2+x+1$ et $P(x)=(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$.

1. Déterminer les racines de A.
2. On note $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $P(j)$ et $P(\bar{j})$.
3. Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a $P(x)=A(x)Q(x)$.

Exercice 24 :
Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A(x)=x^2-3x+2$ et $P(x)=(x-2)^{2n}+(x-1)^n-1$.
Existe-t-il un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x)=A(x)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$?

Exercice 25 :
Soit $P(x)=x^4+2x^3+7x^2+8x+12$. Sachant que P a une racine imaginaire pure, factoriser P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 26 :
On donne le polynôme à coefficients réels $P(x)=x^3+px+q$.

1. Montrer que si a est une racine multiple de P, alors a est réelles.
2. Étudier en fonction de p et q :
   - **a.** Les variations P.
   - **b.** Le nombre de racines réelles de P et leur ordre de multiplicité.
   - **c.** Le signe de $\Delta=4p^3+27q^2$.
3. Vérifier que P a une racine multiple si et seulement si $\Delta=0$.

Exercice 27 :
Soit $P=X^3+pX+q$, avec p et q complexes.

1. Faire la division euclidienne de P par P'. Soit R le reste.
2. On suppose que P a une racine double x_0. Montrer que $R(x_0)=0$. En déduire la valeur de x_0 en fonction de p et q, et trouver une relation entre p et q.

Exercice 28 :
Soit, pour n quelconque, $n>1$, $E=\mathbb{R}_n[X]$. Soit $F=\{P \in E, P(1)=P(2)=P'(1)=0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E. Pour $n<3$, que peut on dire de F ?
2. Pour $n>2$, chercher une base et la dimension de F.

Exercice 29 :
Pour n quelconque, $n>1$, chercher les valeurs de a, b, c pour lesquelles le polynôme $P=X^{2n}+aX^{n+1}+bX^n+cX^{n-1}$ est divisible par $(x-1)^3$.

Exercice 30 :

1. Soit le polynôme $Q=X^2-2X\cos(\phi)+1$. Chercher les racines de Q dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, le polynôme $P=X^n\sin(\phi)-X\sin(n\phi)+\sin((n-1)\phi)$ est divisible par Q.
3. Calculer le quotient de P par Q pour $n=3$ et $n=4$.

Exercice 31 :
Soit $P=X^5+3X+2$.

1. Étudier la fonction P et chercher le nombre de racines réelles de P.
2. P a-t-il des racines doubles dans $\mathbb{C}$.
3. Quelle est la forme de la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$?
4. Exprimer la somme et le produit des racines de P.

Exercice 32 :

Pour n fixé et x compris entre -1 et 1, on pose $T_n(x)=\cos(n\, arcos(x))$.

1. Réduire $T_n(x)+T_{n+2}(x)$. En déduire une relation entre $T_n(x)$, $T_{n+1}(x)$ et $T_{n+2}(x)$.
2. Montrer par récurrence sur n que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n (on pourra faire l'hypothèse sur n et $n+1$, et le montrer pour $n+2$). Quel est le coefficient dominant de $T_n(x)$?
3. Chercher les racines de $T_n(x)$ et montrer qu'elles sont toutes réelles, comprises entre -1 et 1. Factoriser $T_n(x)$.

Exercice 33 :

Soit P un polynôme à coefficient constants réels de degré $n>1$.

1. On suppose que P a n racines réelles distinctes. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que P' a toutes ses racines réelles distinctes.
2. On suppose que n est pair, $n=2p$, et que P a p racines doubles et réelles. Montrer que toutes les racines de P' sont réelles distinctes.

Exercice 34 :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ et placer dans le plan complexe les points correspondants :

1. $z^6=\mathrm{i}+\sqrt{3}$
2. $z^8+2z^4+4=0$
3. $(z+\mathrm{i})^4=2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})^4$
4. $z^4+z^3+z^2+z+1=0$
5. $z^2-(3+4\mathrm{i})z-1+7\mathrm{i}=0$
6. $2z^3-(1+2\mathrm{i})z^2+(25\mathrm{i}-1)z+13\mathrm{i}=0$ (l'équation a une solution réelle qu'il faut d'abord chercher)

Exercice 35 :

Chercher les zéros des polynômes suivants :

$P=X^6-2$

$Q=X^3+X-2$

$R=2X^8+X^4-3$

$S=(X^2+1)^3-8$

$T=X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$

$U=X^n+3^n$ (distinguer les cas n pair et n impair)

Pour chacun de ces polynômes, calculer la somme et le produit des racines.

Factoriser P, Q, S, T dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 36 :

Soit pour n entier naturel le polynôme $P=(x+\mathrm{i})^n-(X-\mathrm{i})^n$.

1. Montrer que P est un polynôme de degré $n-1$ et chercher ses zéros complexes.
2. Montrer que tous ces zéros sont réels.
3. Calculer la somme et le produit des racines de P.

Exercice 37 :

1. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P=1+X^2+X^4+\ldots+X^{2n-2}$.
2. En déduire, en utilisant $P(1)$, l'égalité suivante : $\prod_{k=1}^{k=n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.
3. Pour $n=2$, 3 ou 4, décomposer P dans $\mathbb{R}[X]$.