Exercices – Calcul Matriciel

Exercice 1 :

Soient $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ 4 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Calculer :

1. $BA+CA$ et $(B+C)A$
2. ${}^t(B+A)$ et ${}^tB+{}^tA$
3. ${}^t(BA)$ et ${}^tB\,{}^tA$ et ${}^tA\,{}^tB$
4. A^2-B^2 , $(A-B)(A+B)$ et $(A+B)(A-B)$

Exercice 2 :

Soient A et B deux matrices à coefficients complexes. Montrer que :

1. ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$
2. ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

Exercice 3 :

Calculer A^n avec :

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix}\cos(x) & -\sin(x)\\ \sin(x) & \cos(x)\end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ -3 & 6 & -1\end{pmatrix}$ (on écrira $A=(A+I_3)-I_3$)

Exercice 4 :

Soit $M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M^2=-M+2I_3$. En déduire M^3 en fonction de M et I_3 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , il existe $a_n\in\mathbb{R}$ et $b_n\in\mathbb{R}$, tels que : $M^n=a_nM+b_nI_3$,
   avec pour tout entier naturel n , $\begin{cases}a_{n+1}=b_n-a_n\\ b_{n+1}=2a_n\end{cases}$.
3. En déduire a_n et M^n pour tout n .

Exercice 5 :

Pour $a\in\mathbb{R}$, on pose $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $B=A+N$.

1. Vérifier que $AN=NA$ et $N^3=0$.
2. Calculer B^n pour tout entier $n\geqslant 2$.
3. Pour quelles valeurs de a , la matrice B est elle inversible? Calculer B^{-1} pour ces valeurs de a .

Exercice 6 :

Soit $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$.

1. Vérifier que $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=0$.
2. Déduire que A est inversible si et seulement si $ad-bc\neq 0$. Donner alors l'expression de A^{-1} .
3. Application à la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Exercice 7 :

Soit $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

Exercice 8 :

Soit $J=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout entier naturel non $J^n=6^{n-1}J$.

Exercice 9 :

On considère les matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP. Déterminer deux réels a et b tels que $A=aP+bQ$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n=a^n P+b^n Q$.

Exercice 10 :

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel a_n tel que $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{a}_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la suite (a_n) est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n, puis donner l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 11 :

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D telle que $A=PDP^{-1}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n=P\,D^n\,P^{-1}$, et expliciter A^n.

Exercice 12 :

Soient les matrices : $A=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -7 & -7 & -11 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ -1 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix} 8 & 8 & 16 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ puis justifier que P et Q sont inversibles et expliciter leur inverse respectif.
2. Déterminer la matrice T vérifiant $A=PTQ$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n=8^{n-1}\,P\,T^n\,Q$, et donner tous les coefficients de A^n.

Exercice 13 :

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D telle que $A=PDP^{-1}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n=P\,D^n\,P^{-1}$, et expliciter A^n.
4. On considère trois suites a, b et c telles que, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} a_{n+1}=a_n-2b_n+2c_n \\ b_{n+1}=-a_n+c_n \\ c_{n+1}=a_n-b_n+2c_n \end{cases}$ avec $\begin{cases} a_0=2 \\ b_0=0 \\ c_0=-2 \end{cases}$.

   On introduit la matrice $X_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
b. En déduire l'expression des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) en fonction de n .

Exercice 14 :

On considère trois suites a , b et c telles que, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 5b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + 7b_n - 4c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 5b_n + 5c_n \end{cases}$.

On introduit la matrice : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ ainsi que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ ..
2. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
3. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D . En déduire D^n .
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^n P$.
5. En déduire les coefficients de A^n puis l'expression des suites a , b et c en fonction de n et des conditions initiales a_0 , b_0 et c_0 .

Exercice 15 :

Soient pour t réel, les matrices : $R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ et $S(t) = \begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$.

Montrer les résultats suivants :

1. $R(t+t') = R(t)R(t')$ et $S(t+t') = S(t)S(t')$.
2. $R(t)$ et $S(t)$ sont inversibles et préciser leur inverses.
3. $\{R(t), t \in \mathbb{R}\}$ et $\{S(t), t \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-groupes de $GL_2(\mathbb{R})$.

Exercice 16 :

Chercher si les matrices suivantes sont inversibles. Si elles le sont, calculer l'inverse. Sinon, trouver leur rang, le noyau et l'image de l'endomorphisme associé.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17 :

Chercher l'inverse de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 18 :

On considère la matrice : A= $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

Montrer que A annule un polynôme P de degré 2 que l'on déterminera (on pourra calculer A^2 puis l'exprimer en fonction de I_2 et A).

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Pour tout entier $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P . En déduire l'expression de A^n .