Exercices – Intégration

Exercice 1 :

En exprimant les sommes comme une somme de Riemman, calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^2}$
2. $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^4}$
3. $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+k}$
4. $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}e^{\frac{k+2\mathrm{n}}{n}}$
5. $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\sin(\frac{k\pi}{n})$
6. $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n^2+k^2}$

Exercice 2 :

Soit f une fonction continue, positive ou nulle sur $[a;b]$.

Montrer que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0 \quad\Leftrightarrow\quad f=0$ sur $[a;b]$.

Exercice 3 :

Soit E la fonction partie entière, c'est à dire pour tout $x\in\mathbb{R}$, $E(x)$ est le plus petit entier inférieur ou égal à x.

1. Représenter E.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^n E(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Soit $x\in\mathbb{R}^+$ et $n=E(x)$. Calculer $\int_n^x E(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire $\int_0^x E(t)\,\mathrm{d}t$
4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $F(x)=\int_0^x E(t)\,\mathrm{d}t$
   - **a.** Représenter F.
   - **b.** F est elle continue sur $\mathbb{R}^+$? Dérivable sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 4 :

Soit $I_n=\int_0^1\frac{x^n\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $x\in[0;1]$, on a $|x\ln(x)|\leqslant\frac{1}{e}$.
2. En déduire que $|I_n|\leqslant\frac{1}{ne}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}I_n$.

Exercice 5 :

1. Soit $a>0$ et f une fonction continue sur $[-a;a]$.
   - **a.** Montrer que si f est impaire alors $\int_{-a}^{a}f(t)\,\mathrm{d}t=0$.
   - **b.** Montrer que si f est paire alors $\int_{-a}^{a}f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Soient $T\geqslant 0$, $a\in\mathbb{R}$, f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.
3. Montrer que $\int_a^{a+T}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\int_{2x}^{3x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction f est elle paire ou impaire?

2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

3. En encadrant $\exp(-t^2)$ sur $[2x;3x]$, en déduire un encadrement de $f(x)$, puis la limite de f quand x tend vers $+\infty$.