Exercices – Inégalités, valeur absolue

Exercice 1 :

Montrer les inégalités :

1. $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $|x-t|+|y-z| \leqslant |x-y|+|y-t|+|t-z|+|z-x|$.

2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x+y+z=0 \Rightarrow |x-y|+|y-z|+|z-x| \geqslant \frac{3}{2}(|x|+|y|+|z|)$.

Exercice 2 :

Montrer les inégalités :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $|x-y| \geqslant \frac{1}{2} Max(|x|,|y|) \times \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right|$ (Indication : se ramener au cas où $|x| \geqslant |y|$).

$\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $|x-y| \geqslant \frac{1}{4}(|x|+|y|) \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right|$.

Exercice 3 :

Soit $x \in]1;+\infty[$. montrer que $\frac{(x-1)^2}{8x} \leqslant \frac{x+1}{2} - \sqrt{x} \leqslant \frac{(x-1)^2}{8}$.

Exercice 4 :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$.

1. Montrer que $\forall x \in [a;b]$, $(x-a)(b-x) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

2. Montrer que $\forall (x;y) \in [a;b]^2$, $Min((x-a)(b-y),(y-a)(b-x)) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit a_1, a_2, ..., a_n, n réels de l'intervalle $[0;1]$. Montrer que $\prod_{i=1}^{i=n}(1-a_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{i=n} a_i$.