# Exercices – Groupes. Anneaux. Corps. Morphismes.

## Exercice 1 :

Soit un réel fixé $m$ . On pose $m\mathbb{Z}=\{x\in\mathbb{R}, \exists n\in\mathbb{Z}, x=nm\}$ .

**1.** Montrer que $m\mathbb{Z}$ est un sous groupe de ($\mathbb{R}$,+).

**2.** Déterminer $16\mathbb{Z}\cap 12\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}\cap\sqrt{2}\mathbb{Z}$ .

## Exercice 2 :

Soit $A=\{x\in\mathbb{R}, \exists(a,b)\in\mathbb{Q}^2, x=a+b\sqrt{2}\}$ .

**1.** Montrer que $A$ est un sous groupe de ($\mathbb{R}$,+).

**2.** Montrer que $\forall(x,y)\in A^2$ , $xy\in A$ .

**3.** Montrer que $\forall(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ , $a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a=b=0$ .

**4.** Montrer que $\forall x\in A$ , $x\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x}\in A$ .

**5.** Montrer que (A,+,.) est un corps.

## Exercice 3 :

Pour $a$ et $b$ réels, avec $a\neq 0$ , on définit l'application $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_{a,b}(x)=ax+b$ .

**1.** Montrer que $f_{a,b}$ est bijective, et chercher son application réciproque.

**2.** Déterminer $f_{a,b}\, o\, f_{c,d}$ .

**3.** Montrer que l'ensemble $G$ de toutes les applications $f_{a,b}$ avec $a\neq 0$ est un groupe pour la loi $o$ .

**4.** Ce groupe $G$ est il commutatif?

## Exercice 4 :

Soit $E=\{A,B,C\}$ où $A$ , $B$ , $C$ sont les sommets d'un triangle équilatéral $T$ du plan. Soit $G$ l'ensemble des bijections de $E$ dans $E$ . ( $G$ , $o$ ) est un groupe.

**1.** Déterminer toutes les applications bijectives de $E$ dans $E$ . Combien $G$ a-t-il d'éléments?

**2.** Soit $f$ la bijection telle que $f(A)=B$ , $f(B)=C$ , $f(C)=A$ . Déterminer $g=f\, o\, f$ .

**3.** Soit $G'=\{Id_E, f, g\}$ . Écrire la table d'opération de la loi $o$ dans $G'$ . $G'$ est il un sous groupe de $G$ ?

**4.** Interpréter chaque bijection de $E$ dans $E$ comme une transformation géométrique du triangle $T$ (symétrie ou rotation).

## Exercice 5 :

Soit $U=\{z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$ . (U,.) est un groupe. Soit $g$ l'application de $U$ dans $U$ définie par $g(z)=z^2$ .
Montrer que $g$ est un morphisme de groupes. Est il injectif? Est il surjectif?

## Exercice 6 :

Soit (G,×) un groupe quelconque. Soit $a$ un élément de $G$ . Soit $f$ l'application de $G$ dans $G$ définie par $f(x)=a\times x\times a^{-1}$ .
Montrer que $f$ est un isomorphisme de groupe de $G$ dans $G$ et déterminer $f^{-1}$ .