

Exercices – Fonctions usuelles. Étude de fonctions.

Exercice 1 :

1. Étudier de la fonction cosinus hyperbolique, la fonction sinus hyperbolique et la fonction tangente hyperbolique.
2. Démontrer que pour tous réels a et b
 - a. $ch(a+b)=ch(a)ch(b)+sh(a)sh(b)$
 - b. $sh(a+b)=sh(a)ch(b)+sh(b)ch(a)$
3. En déduire que pour tout réel a : $ch(2a)=ch^2(a)+sh^2(a)$ et que $sh(2a)=2ch(a)sh(a)$
4. Démontrer que pour tout réel a : $ch^2(a)-sh^2(a)=1$
5. Exprimer $th(a+b)$ en fonction de $th(a)$ et $th(b)$ pour tous réels a et b .
6. Linéariser $ch(a)ch(b)$, $sh(a)sh(b)$, $sh(a)ch(b)$, $ch^2(a)$ et $sh^2(a)$.

Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions suivantes,

- Déterminer l'ensemble de définition.
- Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquels la fonction est dérivable.
- Calculer la dérivée de la fonction en tout point où elle est dérivable.
- Étudier les variations de la fonction.
- Étudier les limites aux bornes du domaine de définition.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction.

1. $f(x)=\arcsin(th(x))$
2. $f(x)=\operatorname{argth}(\sin(x))$
3. $f(x)=\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$
4. $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2ch(x)}\right)$
5. $f(x)=\arctan(e^x)$
6. $f(x)=(\cotan(x))^{\frac{1}{sh(x)}}$
7. $f(x)=(2e^x-e^{-x})^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3 :

Étudier la fonction f définie par $f(x)=e^{-x^2}$. Tracer sa courbe représentative et chercher ses points d'inflexion.

Exercice 4 :

1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-th(x)$.
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soit h la fonction définie par $h(x)=\frac{1}{ch(f^{-1}(x))}$.
 - a. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $h'(x)=\frac{-1}{sh(f^{-1}(x))}$.
 - b. Étudier la fonction h et tracer sa courbe.

Exercice 5 :

Montrer les inégalités suivantes :

1. Pour $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $1-x \leq e^{-x}$
3. Pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$
4. Pour $x \geq 0$, $1-x \leq e^{-x} \leq 1-x + \frac{x^2}{2}$

Exercice 6 :

Soit, pour n entier naturel, la fonction T_n définie par $T_n(x)=ch(n \operatorname{argch}(x))$.

1. Préciser l'ensemble de définition de T_n . Chercher en quel points T_n est dérivable et calculer $T'_n(x)$.
2. Réduire $T_n(x)$ pour $n=0$, $n=1$, $n=2$.
3. Montrer que pour p et q réels quelconques, $ch(p)+ch(q)=2ch\left(\frac{p+q}{2}\right)ch\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

4. En déduire une relation entre $T_{n+2}(x)$, $T_{n+1}(x)$, $T_n(x)$ et x .
5. En raisonnant par récurrence sur n , en déduire que T_n est une fonction polynôme de degré n dont on précisera le coefficient du terme de plus haut degré.

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.
3. Étudier les variations de f (On écrira la dérivée sous la forme $f'(x) = \frac{f(x)u(x)}{x^2}$ et on étudiera la fonction u pour trouver son signe).
4. Mêmes questions avec la fonction g définie par $g(x) = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 8 :

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \arcsin(\sin(x))$ et $g(x) = \arcsin(\cos(x))$.

1. Montrer que f et g sont périodiques, chercher si elles sont paires ou impaires.
2. f et g sont-elles continues sur $\mathbb{R}$? dérivables sur $\mathbb{R}$?
3. Simplifier l'expression de $f(x)$ et $g(x)$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
4. Tracer les courbes représentatives de f et g .

Exercice 9 :

Étudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arccos(2x^2 - 1)$
2. $g(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

Exercice 10 :

Soit x réel non nul. On pose $y = \arctan(x)$ et $z = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que, pour $x > 0$, $y + z = \frac{\pi}{2}$.
2. Combien vaut $y + z$ pour $x < 0$?

Exercice 11 :

Résoudre l'équation $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$