Exercices – Fonctions : Continuité

Exercice 1 :

1. Tracer la représentation graphique de la fonction h définie sur $[-1;3]$ par $h(x)=x-x\times E(x)$.
2. Sur quels intervalles la fonction h est elle continue?

Exercice 2 :

1. f est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=3x^2+2x-5$.
2. On considère les fonctions g et h telles que $g=\frac{1}{f}$ et $h=\sqrt{f}$.
3. Préciser sur quel ensemble chacune des fonctions f, g et h est continue, et interpréter en terme de représentation graphique.

Exercice 3 :

m désigne un réel. Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x\leqslant 0 \\ x^2 \text{ si } 0<x<1 \\ m \text{ si } x\geqslant 1 \end{cases}$.

On note C_m , la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(\text{O};\vec{i},\vec{j})$.

1. On choisit $m=2$. Tracer C_2 . La fonction f est elle continue sur ℝ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la fonction f est elle continue sur ℝ?

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur ℝ : $f(x)=(1+x)^3+x$.

1. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in$ ℝ .
2. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
3. Étudier le signe de f sur ℝ.

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie sur ℝ : $f(x)=x^3-3x-1$.

1. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$.
2. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} des solutions.
3. Étudier le signe de f sur ℝ.

Exercice 6 :

Déterminer le nombre des solutions de l'équation $\sin(x)=\frac{x}{2}$ sur $[0;\pi]$, puis sur $[-\pi;0]$.

Exercice 7 :

Soit une fonction polynôme f de degré $n>0$. Établir les résultats suivants :

1. f a même limite à l'infini que son monôme de plus haut degré.
2. Si n est impair, f est surjective de ℝ dans ℝ .

Exercice 8 :

Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair à au moins une racine réelle.

Exercice 9 :

Soit une fonction f continue strictement décroissante sur $[0;1]$ telle que $f(0)\leqslant 1$ et $f(1)\geqslant 0$.

1. Montrer que l'équation $f(x)=x$ a une solution unique, notée s , sur $[0;1]$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x^2$ a une solution unique, notée s' , sur $[0;1]$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $s\leqslant s'$.

Exercice 10 :

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f(0)=f(1)$.

1. Soit un entier $n>0$. Montrer qu'il existe un réel c compris entre 0 et $1-\frac{1}{n}$ tel que $f\left(c+\frac{1}{n}\right)=f(c)$

   (Indication : on posera $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$ et on en réduira la somme $g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+g\left(1-\frac{1}{n}\right)$)
2. Chercher c dans les cas suivants : $f(x)=x(1-x)$ et $f(x)=\sin(\pi x)$. Dans chaque cas, on trouvera une seule valeur de c dépendant de n .

Exercice 11 :

1. Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes une infinité de fois.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Montrer que f' est T-périodique.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^5+ax$, a réel fixé.

1. On suppose $a>0$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, que sa réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $(f^{-1})'(x)$ en fonction de $(f^{-1})(x)$.

2. Pour $a<0$, résoudre l'équation $f(x)=0$. f est elle injective? Surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 13 :

On donne le polynôme à coefficients réels $P(x)=x^3+px+q$. Étudier en fonction de p et q :

1. Les variations P.

2. Les limites de P.

3. Les extremum locaux éventuels de P.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ a 3 solutions réelles distinctes si et seulement si $\Delta=4p^3+27q^2<0$.

Exercice 14 :

Faire l'étude de la fonction définie par : $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$.

Exercice 15 :

La fonction f définie est elle prolongeable par continuité? $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+\alpha \ si |x|>2 \\ 2x-1 \ si |x|<2 \end{cases}$.

Exercice 16 :

Montrer que l'équation $x^{17}=x^{11}+1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}^+$ admet au moins une solution.

Exercice 17 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ si \ x\neq 0 \\ 0 \ si \ x=0 \end{cases}$.

Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.