Exercices – Dérivation à l'ordre n. Fonctions de classe C^n

Exercice 1 :

Pour les fonctions suivantes, indiquer l'ensemble de définition, préciser en quel points elles sont dérivables, et chercher si elles sont de classe C^2. Si oui, calculer alors la dérivée seconde.

1. $f(x)=\sin(\sqrt{x^2+1})$
2. $g(x)=\arcsin(2x-1)$
3. $h(x)=\arctan\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Exercice 2 :

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel $f_n'(x)=nx^{n-1}$

Exercice 3 :

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

Montrer par récurrence que f est dérivable n fois sur sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=(x^2+x+1)\sin(x)$.
A l'aide de la formule de Leibniz, exprimer $f^{(n)}(x)$ (distinguer les cas n pair, et n impair).

Exercice 5 :

1. Étudier la fonction f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$. Tracer sa courbe représentative et chercher ses points d'inflexion.
2. Montrer par récurrence sur n, que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée $n^{ième}$ est de la forme $f^{(n)}(x)=H_n(x)f(x)$, où H_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré. Chercher une relation entre $H_{n+1}(x)$, $H_n(x)$ et $H'_n(x)$.

Exercice 6 :

1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$.
2. Montrer par récurrence sur n, que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée $n^{ième}$ est de la forme $f^{(n)}(x)=H_n(x)f(x)$, où H_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
3. A partir de la relation $f'(x)=-xf(x)$, obtenir au moyen de la formule de Leibniz une relation entre H_{n+1}, H_n, H_{n-1}.

Calculer H_0, H_1, H_2, H_3.
En utilisant les questions précédentes, donner une relation entre H'_n et H_{n-1}.

Exercice 7 :

Calculer la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\frac{1}{1-x}$
2. $g(x)=\frac{1}{1+x}$
3. $h(x)=\frac{1}{1-x^2}$, écrire $h^{(n)}(x)$ sous la forme $\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1}}$, où P_n est une fonction polynôme.
4. $k(x)=\arcsin(x)$, on montrera que pour $n\geqslant 1$, $k^{(n)}(x)$ est de la forme $\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}$, où P_n est une fonction polynôme.

Exercice 8 :

Exprimer la dérivée d'ordre n de $f(x)=\mathrm{e}^x\cos(x)$ sous la forme $f^{(n)}(x)=r^n\mathrm{e}^x\cos(x+n\theta)$.

Exercice 9 :

Calculer la dérivée d'ordre n de $f(x)=x^2e^{-x}$ et de $g(x)=xe^{2x}$.