Exercices – Applications linéaires

Exercice 1 :

Soient les applications u et v de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :
pour $X=(x,y)$, $u(X)=(2x+y, x+3y)$ et $v(X)=(2x+y, 4x+2y)$.

1. Montrer que u et v sont linéaires.
2. Chercher si $v\circ u=u\circ v$.
3. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $u^{-1}(X)$.
4. Déterminer $ker(v)$.
5. Montrer que $\Im(v)$ est la droite vectorielle engendrée par $(1,2)$.

Exercice 2 :

Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^2$, soient les droites vectorielles D, engendrée par $U=(1,2)$, et D' engendrée par $U'=(3,4)$.

1. Montrer que D et D' sont supplémentaires dans E : pour $X=(x,y)$, on déterminera Y sur D et Z sur D' tels que $X=Y+Z$.
2. Soit s la symétrie vectorielle par rapport à D, parallèlement à D'. Pour $X=(x,y)$, déterminer $s(X)$ et vérifier que $s\circ s=Id_E$.

Exercice 3 :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : pour $X=(x,y,z)$, $f(X)=(2x+y+z, x-y+3z)$.
Montrer que f est linéaire, que $Ker(f)$ est une droite vectorielle et que f est surjective.

Exercice 4 :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : pour $X=(x,y,z)$, $f(X)=\left(\frac{x-y-z}{3}, \frac{-2x+5y-z}{6}, \frac{-2x-y+5z}{6}\right)$.

1. Montrer que f est linéaire. Chercher son noyau.
2. Déterminer $(f\circ f)(X)$ et montrer que f est un projecteur vectoriel.

Exercice 5 :

Soit l'espace vectoriel E des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit T l'application de E dans E qui, a toute fonction f de E associe la fonction $T(f)=f''+3f'+2f$.
Montrer que T est un endomorphisme de E. déterminer $Ker(T)$. T est il un automorphisme?

Exercice 6 :

Soit l'espace vectoriel E des fonctions polynômes et soient les applications :
u de E dans E définie par $u(P)=P'+2P$, v de E dans $\mathbb{R}^3$ définie par $v(P)=(P(0), P(1), P'(1))$
Montrer que u et v sont linéaires, et que v est surjective et non injective.

Exercice 7 :

Soit S l'espace vectoriel des suites réelles. Soit L l'application de S dans S qui à toute suite $u=(u_n)$, associe $L(u)=v$ déterminer par : $\forall n\in\mathbb{N}$ $v_n=u_{n+1}-u_n$. Montrer que L est linéaire, et déterminer $Ker(L)$.

Exercice 8 :

Dans $E=\mathbb{R}^3$, muni de la base canonique b, soit $F=\{(x,y,z)\in E, 2x+y+3z=0\}$ et soit D la droite vectorielle engendrée par $U=(1,2,3)$. Soit p le projecteur sur F, parallèlement à D.

1. Pour $X=(x,y,z)$, calculer $p(X)$. En déduire la matrice P de p par rapport à b et la matrice S de la symétrie s par rapport à F, parallèlement à D.
2. Retrouver à l'aide de P, le noyau, le rang et l'image de p.
3. Calculer P^2, S^2, SP et PS.

Exercice 9 :

Soit un espace vectoriel E sur K, de dimension 3, de base $b=(i,j,k)$.

Soit u l'endomorphisme de E, dont la matrice par rapport à b est $A=\begin{pmatrix}-10 & 20 & 2\\ -11 & 22 & 7\\ 12 & -24 & -12\end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Chercher le noyau, le rang et l'image de u, de $u\circ u$ et $u\circ u\circ u$ (on donnera une base de chacun de ces sous-espaces).

Exercice 10 :

Soit $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. On pose $tr(A)=a+d$ (trace de A) et $det(A)=ad-bc$.

1. Vérifier que $A^2-(tr(A))A+(det(A))I_2=0$.
2. Déduire que A est inversible si et seulement si $ad-bc\neq 0$. Donner alors l'expression de A^{-1} .
3. Application à la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que $\forall (A,A')\in M_2(\mathbb{C})^2$, $det(AA')=det(A)det(A')$ et $tr(AA')=tr(A'A)$.

Exercice 11 :

Soit E_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n . On rappelle que la famille de fonctions $F=\{p_k,\ p_k(x)=x^k,\ k=0...\mathrm{n}\}$ est une base de E_n .

Soit T l'application qui, à toute fonction f de E_n associe la fonction $T(f)$ définie par $T(f)(x)=xf'(x)+2f(x)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E_n .
2. Chercher les coordonnées dans F de $T(p_k)$. En déduire la matrice M de T par rapport à F .
3. En utilisant M , chercher le noyau et le rang de T . T est-il un automorphisme?

Exercice 12 :

Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 , de base $B=(i,j)$.

1. Vérifier que les familles $B'=(2i,j)$ et $B''=(j,i)$ sont des bases de E .
2. Écrire les matrices de passage P , de B à B' , et P' de B à B'' . Chercher les inverses de P et P' .
3. Soit u un endomorphisme de E , de matrice $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par rapport à la base B . Déterminer la matrice M' de u par rapport à B' et la matrice M'' de u par rapport à B'' .
4. On cherche les endomorphismes u de E dont la matrice est invariante par tout changement de base. Montrer que u est proportionnel à Id_E .

Exercice 13 :

Soit E un espace vectoriel sur K , de dimension 3 , de base $B=(i,j,k)$.

Soit u l'endomorphisme de E , dont la matrice par rapport à B est $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau, le rang et l'image de u .
2. Soient les 3 vecteurs X , Y , Z de E , X de coordonnées $(1,-2,1)$ par rapport à la base B , Y de coordonnées $(1,1,1)$ par rapport à la base B , et $Z=u(Y)$.
   a. Chercher les coordonnées de Z dans la base B et montrer que la famille $B'=(X,Y,Z)$ est une base de E .
   b. Écrire la matrice A' de u par rapport à B' , la matrice de passage P de B à B' et la relation entre A , A' et P .

Exercice 14 :

Dans l'ensemble E des vecteurs de l'espace physique, muni d'une base orthonormée directe $B=(i,j,k)$, soit un endomorphisme u dont la matrice A par rapport à la base B est antisymétrique.

1. Montrer qu'il existe un seul vecteur V de E tel que $\forall X\in E$, $u(X)=V\wedge X$.
2. Si u n'est pas nul, déterminer son noyau et son rang.
3. Montrer que A^2 est symétrique et que A^3 est proportionnelle à A .

Exercice 15 :

Pour n fixé, soient :

S l'ensemble des matrices carrées symétriques à n lignes et n colonnes,

A l'ensemble des matrices antisymétriques,

T_S l'ensemble des matrices triangulaires supérieures,

T_i l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

Soient les applications :

f de T_S dans T_i définie par $f(M)=M^t$

g de T_S dans S définie par $g(M)=M+M^t$

h de T_S dans A définie par $h(M)=M-M^t$

Montrer que f et g sont des isomorphismes, et que h est linéaire surjective. Chercher $Ker(h)$.

Exercice 16 :

Soit E un espace vectoriel sur K, et $f \in L(E)$. Montrer que $ker(f) = kerf(f^2)$ si et seulement si $kerf(f) \cap \Im(f) = \{0\}$.

Exercice 17 :

Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Déterminer une base du noyau et l'image de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 18 :

On considère l'application f de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(0), P(1), P(-1))$.

1. Justifier que f est linéaire.

2. Déterminer le noyau et l'image de f .

3. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$.