Exercices – Espaces vectoriels

Exercice 1 :

Soit $E = \mathbb{R}^3$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient :

$$F = \{(x, y, z) \in E, 3x + y - 2z = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in E, x + y - z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de E .
2. Montrer que G est une droite vectorielle engendrée par un vecteur que l'on précisera.
3. Montrer que F est un plan vectoriel engendré par deux vecteurs que l'on précisera.

Exercice 2 :

Soit $E = \mathbb{R}^4$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E, x - y + z - 2t = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \in E, x - 2y = 0 \text{ et } x + z + t = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de E .
2. Montrer que G est un plan vectoriel engendré par deux vecteurs que l'on précisera.
3. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur que l'on précisera.

Exercice 3 :

Soit $E = \mathbb{R}^3$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $F = \{(x, y, z) \in E, 2x + y + z = 0\}$ et G la droite vectorielle engendrée par $U = (1, 2, 1)$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et que c'est un plan vectoriel.
2. Pour $X = (x, y, z)$ quelconque dans E , déterminer Y dans F et Z dans G tels que $X = Y + Z$. En déduire que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 4 :

Soit S l'espace vectoriel des suites réelles. Soient F l'ensemble des suites arithmétiques et G l'ensemble des suites géométriques.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de S et que c'est un plan vectoriel.
2. G Est-il un sous espace vectoriel de S ?

Exercice 5 :

On rappelle que $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Soient F l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, G l'ensemble des fonctions 2π périodiques sur $\mathbb{R}$, H l'ensemble des fonctions affines.
  - a. Montrer que F , G , H sont des sous espaces vectoriels de E , et que H est un plan vectoriel.
  - b. Déterminer $G \cap H$.
2. Soient P l'ensemble des fonctions polynômes et Q l'ensemble des fonctions polynômes q telles que $q(0) = q'(0) = 0$.
  - a. Montrer que P et Q sont des sous espaces vectoriels de E .
  - b. Montrer que P est somme directe de Q et H .

Exercice 6 :

Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient les vecteurs $U = (1, 2, 3)$, $V = (1, -1, 2)$, $W = (2, 3, 5)$.

1. Ces vecteurs forment-ils une base de E ?
2. Même question avec les vecteurs $U = (1, 2, 3)$, $V = (4, 5, 6)$, $W = (7, 8, 9)$.

Exercice 7 :

Dans $E = \mathbb{R}^4$, soient les vecteurs $U = (m, 1, 1, 1)$, $V = (1, m, 1, 1)$, $W = (1, 1, m, 1)$ et $Z = (1, 1, 1, m)$.

Chercher les valeurs de m pour lesquelles la famille (U, V, W, Z) est libre.

Exercice 8 :

Dans $E = \mathbb{R}^4$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soient $F = \{(x, y, z, t) \in E, x + y + z + 3t = 0\}$ et G la droite vectorielle engendrée par $U = (1, 2, 1, 1)$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E . Chercher une base de F et sa dimension.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 9 :

Soit un espace vectoriel E de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, de base $b = (i, j, k, l)$.

Soient $F = \{(x, y, z, t) \in E, x + 2y - z - t = x - y + z = 0\}$ et $F' = \{(x, y, z, t) \in E, x + y + z = x + y - 2z - t = 0\}$.

Déterminer une base de F , une base de F' . Chercher $F \cap F'$ et $F + F'$.

Exercice 10 :

Soit $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5, x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$. Déterminer une base de F et sa dimension.
2. Soit G le sous espace vectoriel engendré par $(1,0,1,0,1)$ et $(0,1,1,1,0)$. Déterminer $F \cap G$ et $F+G$.

Exercice 11 :

Si E est un espace vectoriel de dimension n sur K , on appelle hyperplan de E tout sous espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

1. Soit H un hyperplan de E . Soit D une droite vectorielle de E . Montrer que si D n'est pas contenue dans H , H et D sont supplémentaires dans E .
2. Si H et H' sont deux hyperplans distincts de E , quelles sont les dimensions de $H \cap H'$ et $H+H'$?
3. Quelle est la dimension minimale de l'intersection de 3 hyperplans de E ?

Exercice 12 :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On rappelle que la famille $\{p_k, p_k(x) = x^k, k = 0..3\}$ est une base de E .

Montrer que les fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par $f_0(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$, $f_1(x) = x(x+2)(x+3)$, $f_2(x) = x(x+1)(x+3)$ et $f_3(x) = x(x+1)(x+2)$ forment une famille libre dans E .

Exercice 13 :

Montrer que les fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par $f_0(x) = \sin(x)$, $f_1(x) = \sin(2x)$, $f_2(x) = \cos(x)$ et $f_3(x) = \cos(2x)$ forment une famille libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.