

Exercices – Équations différentielles linéaires à coefficients constants du second ordre

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 5y' + 4y = 3$
2. $y'' + 2y' + 3y = 2$
3. $y'' + 2y' + y = \cos(x)$
4. $y'' + 4y = 3\sin(2x) + \cos(3x)$

Chercher pour chacune de ces équations l'unique fonction solution y_0 telle que $y_0(0) = m$ et $y'_0(0) = 0$.

Exercice 2 :

Soit un point mobile $M(t)$ se déplaçant dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct. Le point $M(t)$ a pour coordonnées $x(t)$ et $y(t)$. On suppose que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ vérifient les équations suivantes :

$$x'(t) = y(t) + 4 \quad \text{et} \quad y'(t) = -3x(t) + y(t) + \cos(t)$$

1. Montrer que $y(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire du 2^{ème} ordre à coefficients constants que l'on précisera.
2. En déduire $y(t)$ et $x(t)$ (on trouvera des fonctions dépendant de 2 paramètres arbitraires).

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + y' + y = 0$
4. $y'' - 10y' + 25y = 25x^2 + 5x + 17$
5. $y'' - 3y' = 2 - 6x$
6. $y'' = x - 1$
7. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$
8. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$
9. $y'' - 2y' + y = x^2e^x$
10. $y'' + 4y = 10\sin(3x)$
11. $y'' + y = x\sin(x)$
12. $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos(x)$
13. $y'' + 9y = 3\cos(3x) + 9e^{3x}$
14. $y'' + 4y = \sin^2(x)$
15. $y'' - 2y' + y = \sin(x) + \sinh(x)$
16. $y'' - y' - 2y = -x^2 - 3x$
17. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$
18. $y'' - 4y' + 3y = xe^x$
19. $y'' + 4y' + 4y = xe^x$
20. $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$
21. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$
22. $y'' - y = xe^x$
23. $y'' - 4y' + 4y = (x^2 - 1)e^{2x}$
24. $y'' - 4y' + 5y = x + 1$
25. $y'' - 2y' + 5y = x^2e^x$
26. $y'' + y = \sin(x)\cos(x)$
27. $y'' + 3y' + 2y = \cos^2(x)$
28. $y'' + 4y' + 4y = -\sin(x)$
29. $y'' + y = \sin(x) + \cos(x)$

Exercice 4 :

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - y = |x|$

Exercice 5 :

Résoudre l'équation différentielle suivante :

1. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x)$
2. $y'' - 2y' + 2y = xe^x \sin(2x)$

Exercice 6 :

Résoudre, à l'aide de la méthode « variation des constantes », les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos^2(x)}$
2. $y'' + y = \frac{1}{\cos^2(x)}$
3. $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$

Exercice 7 :

Soit un point mobile $M(t)$ se déplaçant dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct. Le point $M(t)$ a pour coordonnées $x(t)$ et $y(t)$. dans les cas suivants, chercher pour toute valeur de t :

- Les coordonnées du vecteur vitesse.
 - Les coordonnées du vecteur accélération.
 - La vitesse numérique (norme du vecteur vitesse).
 - Une mesure de l'angle entre Ox et le vecteur vitesse.
1. $x(t) = t - \sin(t)$ et $y(t) = 1 - \cos(t)$
 2. $x(t) = e^{-t} \cos(\sqrt{3}t)$ et $y(t) = e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)$
 3. $x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$ et $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$

Exercice 8 :

Intégrer les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$
2. $y'' - 5y' + 6y = (x+1)e^{2x}$
3. $y'' + 2y' + y \cos^2 \alpha = 2 \operatorname{ch}(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, discuter selon les valeurs de α)
4. $y'' + 9y = x \sin(3x)$