Exercices – Courbes paramétrées

Exercice 1 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{1-t^2} \\ y(t)=\dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$

Exercice 2 :

Faire l'étude complète de *l'astroïde* paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\cos^3(t) \\ y(t)=\sin^3(t) \end{cases}$

Exercice 3 :

Faire l'étude complète de la *cycloïde* paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=t-\sin(t) \\ y(t)=1-\cos(t) \end{cases}$

Exercice 4 :

Faire l'étude complète de la *Lemniscate de Bernouilli* paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t)=\dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$

Exercice 5 :

Faire l'étude complète du *Folium de Descartes* paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t)=\dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Exercice 6 :

On considère la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{t}+\ln(2+t) \\ y(t)=\dfrac{1}{t}+t \end{cases}$ avec $t\in\,]-2\,;+\infty[$

Montrer que cette courbe possède un unique point stationnaire. Donner l'équation de la tangente en ce point ainsi que la l'allure de la courbe au voisinage de ce point.

Exercice 7 :

On considère dans cet exercice la *tractrice* paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=t-th(t) \\ y(t)=\dfrac{1}{ch(t)} \end{cases}$

1. Faire l'étude complète de cette courbe. En particulier, on précisera la nature du point A de paramètre 0, ainsi que la tangente en ce point.
2. Pour tout réel $t>0$, déterminer une équation cartésienne de la tangente D_t au point $M(t)$ de paramètre t.
3. Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point $N(t)$. déterminer les coordonnées de ce point $N(t)$ puis calculer la distance $M(t)N(t)$.

Exercice 8 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=3\cos(t)-\cos(3t) \\ y(t)=3\sin(t)-\sin(3t) \end{cases}$

Exercice 9 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=2\cos(t) \\ y(t)=3\sin(2t) \end{cases}$

Exercice 10 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=1+4\cos(t) \\ y(t)=-3+2\sin(t) \end{cases}$

Exercice 11 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\sin(t) \\ y(t)=\sin(2t) \end{cases}$

Exercice 12 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\cos(3t) \\ y(t)=\sin(2t) \end{cases}$

Exercice 13 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\sin(2\mathrm{t}) \\ y(t)=\sin(3t) \end{cases}$

Exercice 14 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=2\cos(t)-\cos(2t) \\ y(t)=2\sin(t)+\sin(2t) \end{cases}$

(On commencera par montrer que le point $M\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)$ est l'image du point $M(t)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$)

Exercice 15 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{3}(\cos(2t)+2\cos(t)) \\ y(t)=\dfrac{1}{3}\sin(2t) \end{cases}$

Exercice 16 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^{t-1}-t \\ y(t)=t^3-3t \end{cases}$

Exercice 17 :

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y(t)=\dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$