Exercices – Coniques

Exercice 1 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les coniques d'équations respectives :

(C) : $x^2+3x-4y+3=0$

(C') : $3x^2-5y^2+2x-3y=6$

(C") : $x^2+4y^2+3x-5y=K$, K réel donné.

Pour chacune d'elles, réduire son équation, chercher son genre, ses axes de symétrie, son centre de symétrie éventuel, son excentricité, ses foyers, ses sommets. Construire ces courbes.

Exercice 2 :

Soit une hyperbole (H) d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé.

1. Soit θ une mesure de l'angle entre les asymptotes. Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de a et b.
2. En déduire une relation entre l'excentricité e de (H) et $\cos(\theta)$.
3. On dit qu'une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont orthogonales. Quelle est alors sont excentricité?

Exercice 3 :

Soit une hyperbole (H) dans le plan. Pour un point M de (H), on considère le triangle T formé par les asymptotes à (H) et la tangente en M à (H).

Montrer que l'aire de T est constante (on cherchera d'abord les coordonnées des points d'intersection de la tangente en M et des asymptotes).

Exercice 4 :

Soit une ellipse (E) et une hyperbole (H) d'équations réduites respectives dans un repère orthonormé direct :

(E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(H) : $\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1$

1. Chercher une condition nécessaire et suffisante sur a, b, a', b' pour que (E) et (H) aient les mêmes foyers.
2. Cette condition étant réalisée, montrer que (E) et (H) se coupent en 4 points, et qu'en ces 4 points, les tangentes à (E) et (H) sont orthogonales entre elles.