

Exercices – Applications bijectives

Exercice 1 :

Chercher si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x+3)$
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ définie par $f(x) = \sin(x+3)$
3. $f:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(x)$
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + e^{2x}$
5. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = 1 + e^{2x}$
6. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 2n$

Exercice 2 :

Montrer que les applications suivantes sont bijectives et expliciter leurs applications réciproques :

1. $f: \mathbb{C} - \{4\} \rightarrow \mathbb{C} - \{2\}$ définie par $f(z) = \frac{2z+5}{z-4}$
2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x+2y, 2x+y)$
3. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x+y, 2x+3y)$

Exercice 3 :

Soit la fonction h définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par $h(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2x+3}\right)$.

1. Chercher l'ensemble de définition E de h .
2. A partir de l'équation $h(x) = y$ où y est fixé, montrer que h est bijective de E sur une partie F de $\mathbb{R}$ à préciser, et exprimer $h^{-1}(y)$.

Exercice 4 :

Déterminer les conditions sur f pour qu'elle soit bijective. Expliciter f^{-1} .

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x$
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$