

DM1 – PTechno – Correction

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$.

1. Montrons que (u_n) est une suite arithmétique :

Chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent le même nombre réel 1, donc la suite est arithmétique de raison $r=1$.

Autre rédaction possible :

$u_{n+1} = u_n + 1$ est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc (u_n) est arithmétique de raison $r=1$.

2. Donnons une expression de u_n en fonction de n : $u_n = u_0 + nr = -2 + n$

3. Calculer u_{30} : $u_{30} = -2 + 30 = 28$

4. Calculer $S_{30} = u_0 + u_1 + \dots + u_{30}$

$$S_{30} = u_0 + u_1 + \dots + u_{30} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = 31 \times \left(\frac{u_0 + u_{30}}{2} \right) = 31 \times \left(\frac{-2 + 28}{2} \right) = 31 \times 13 = 403$$

Exercice 2 :

1. Donnons P_0 . Calculons P_1 et P_2 :

$$P_0 = 50000$$

$$P_1 = P_0 + 800 = 50800$$

$$P_2 = P_1 + 800 = 51600$$

2. Montrons que (P_n) est une suite arithmétique :

Chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent le même nombre réel 800, donc la suite est arithmétique de raison $r=800$.

Autre rédaction possible :

$$P_{n+1} = P_n + 800$$

Donc (P_n) est arithmétique de raison 800 et de premier terme $P_0 = 50000$.

3. Donnons la forme explicite de (P_n) : $P_n = P_0 + nr = 50000 + 800n$

4. Si le nombre d'habitants continue d'augmenter de la même manière chaque année, calculons le nombre d'habitants en 2030 :

$$P_{27} = 50000 + 800 \times 27 = 71600.$$

5. Déterminons le plus petit entier n tel que $P_n \geq 100000$:

$$P_n \geq 100000$$

$$50000 + 800n \geq 100000$$

$$800n \geq 100000 - 50000$$

$$800n \geq 50000$$

$$n \geq \frac{50000}{800} = 62,5$$

donc le plus petit entier n tel que $P_n \geq 100000$ est $n=63$

P_0 correspond à 2003

P_{63} correspond à 2066

en 2066 la population dépassera 100000 habitants.